МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТРАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

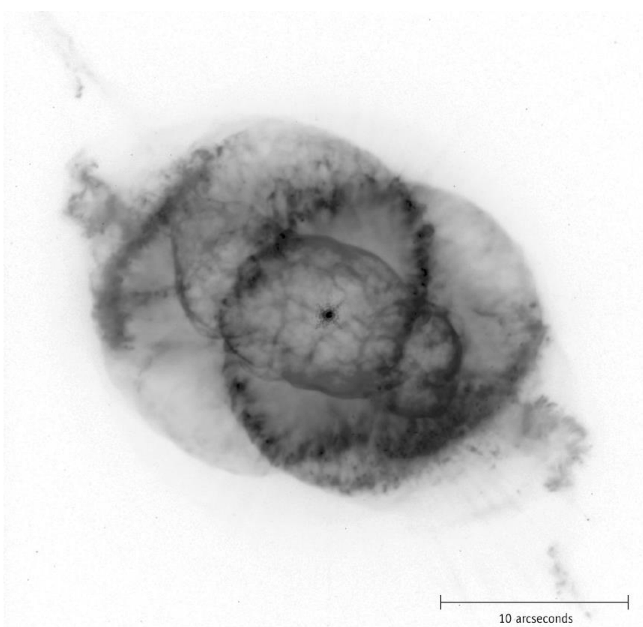
XII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
http://astro-olymp.org

IV кръг
Теоретичен тур

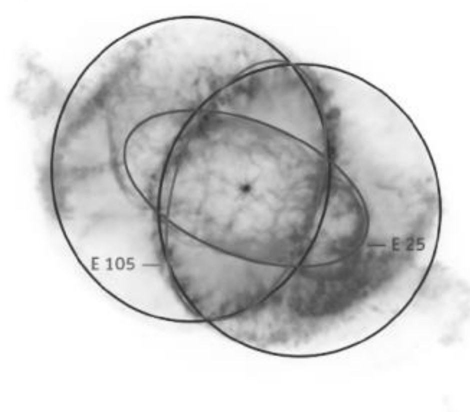
Младша възраст – решения

Задача 1. Котешко око (Адаптирана от ESO Exercises)**.** Красивата планетарна мъглявина Котешко око (Фиг. 1) се намира в съзвездието Дракон. Изображенията на мъглявината, получени в различни години от телескопа "Хъбъл", дават възможност да се проследи разширяването на мъглявината в космическото пространство. Ние ще разгледаме увеличаването на малката полуос на елипсоидалното образувание Е 25, означено на Фиг. 2. На Фиг. 3 са дадени две изображения на мъглявината в еднакъв мащаб, получени на 18.X.1994 г. и на 17.VIII.1997 г. При сравняването им разширението на мъглявината не може да се забележи и да се измери пряко. Но разделителната способност на телескопа "Хъбъл" позволява да се получи резултат по друг начин. При обработка с компютър размерите на първото изображение се увеличават с коефициент F, малко по-голям от единица. После се прилага математическа процедура на "изваждане" на първото изображение от второто. Резултатите за различни пробни стойности на F са дадени на Фиг. 4. По спектрални изследвания и теоретично моделиране на мъглявината е определено, че малката полуос на образуванието Е 25 се увеличава със скорост 16.4 км/сек.

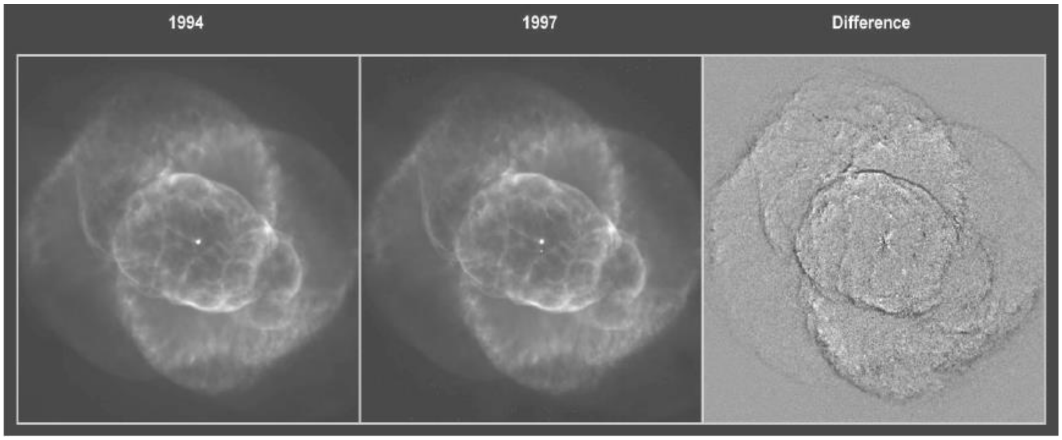
- Като използвате предоставената ви информация, определете разстоянието до мъглявината Котешко око.
- Оценете приблизително възрастта на мъглявината.



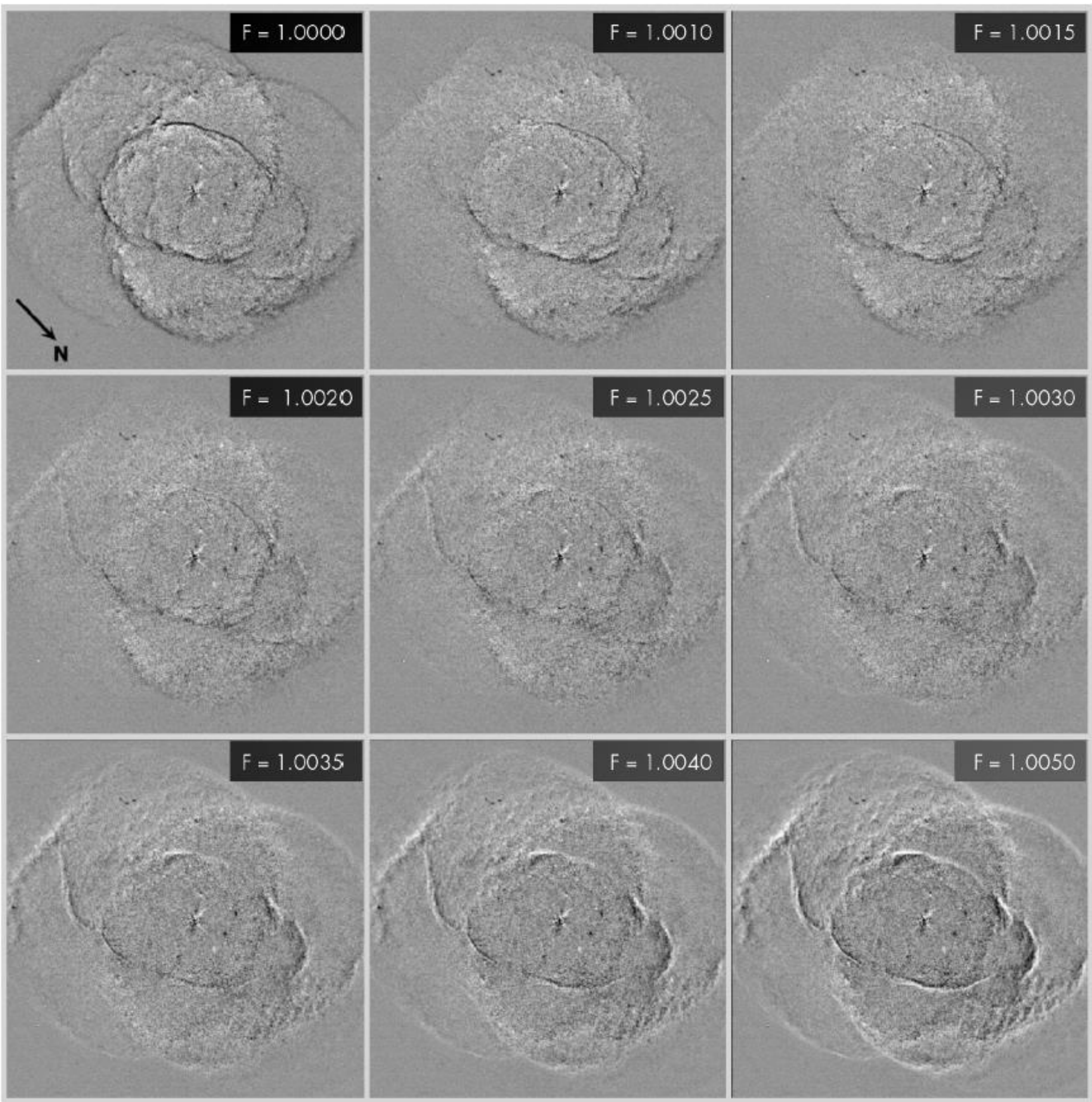
Фиг. 1



Фиг.2


1994
1997
Difference

Фиг. 3


F = 1.0000
N
F = 1.0010
F = 1.0015
F = 1.0020
F = 1.0025
F = 1.0030
F = 1.0035
F = 1.0040
F = 1.0050

Фиг. 4

Решение:

Ако след умножението на размерите по фактор F, снимката от 1994 г се окаже еднаква с тази от 1997 г, то при изваждането на двете изображения би трябвало да се получи остатъчен кадър, на който да няма почти нищо. Следователно факторът, с който ъгловият размер на мъглявината се е увеличил за дадения период от време, е този, при който остатъчният кадър е най-празен. Виждаме, че това се реализира при кадъра, получен чрез умножение с фактор 1,0025. Все пак и на този кадър има някакво остатъчно избражение. Можем да предположим, че точната стойност на фактора е между 1,0025 и 1,0030, примерно 1,00275. За интервала от време между 18.X.1994 г. и 17.VIII.1997 г. (t = 1064 дни) ъгловият, а и линейният размер на малката полуос на E 25 се е увеличил с 0,275%. От Фигура 1 измерваме малката полуос на елиптичното образувание E 25 в милиметри и като използваме дадения ни мащаб в дъгови секунди, получаваме нейния видим ъглов размер $\delta \approx 4''$. Това означава, че промяната на малката полуос за дадения интервал от време ще бъде

$$\Delta\delta = \delta(F-1) \approx 0.011''$$

Известно е, че E 25 се разширява със скорост V = 16.4 km/s. За времето t това образувание ще се е разширило с $V.t$. Това разширение се вижда от Земята под ъгъл Δδ, откъдето намираме разстоянието до мъглявината:

$$d = \frac{Vt}{\Delta\delta'' \cdot \dfrac{\pi}{180° \cdot 60' \cdot 60''}} \approx 2960 \text{ ly} \approx 910 \text{ pc}$$

Линейният размер на E 25 е:

$$d = \delta'' \cdot \frac{\pi}{180° \cdot 60' \cdot 60''} \cdot r \approx 0.057 \text{ ly}$$

Можем да приемем приблизително, че за времето на живот на образуванието, малката му полуос се е увеличила до този размер със скорост V. Възрастта на образуванието можем да намерим от простото съотношение $T = d/V$. Но за пресмятанията ще трябва първо да превърнем d в километри, при което ще получим възрастта в секунди. По-лесно е да съобразим, че числената стойност на T в години време е толкова пъти по-голяма от числената стойност на d в светлинни години, колкото пъти скоростта на светлината ($c = 300000 \text{ km/s}$) е по-голяма от V:

$$T[\text{yr}] = d[ly] \cdot \frac{c}{V} \approx 1000 \text{ yr}$$

Задача 2. Две слънца. Сияйната планета си има не едно, а цели две слънца, същите като нашето Слънце. В тази двойна звездна система планетата се намира в една от точките на Лагранж, която образува равностранен триъгълник с двете звезди. Планетата и двете звезди се движат по кръгови орбити, запазвайки равностранния триъгълник. Масата на планетата е много по-малка от масите на звездите – може да се счита, че при движението си звездите не се влияят от нейното присъствие.

Сияйната планета по размери е същата като Земята. Като цяло тя получава от двете свои слънца също толкова лъчиста енергия в единица време, колкото Земята получава от Слънцето.

- Намерете в астрономически единици дължината на страната на равностранния триъгълник, който планетата образува със звездите. Намерете орбиталния период на системата в земни години.
- Периодът на околоосно въртене на Сияйната планета е 66 земни часа, а нейната ос е перпендикулярна на орбиталната ѝ равнина. Определете продължителността на деня и продължителността на нощта на Сияйната планета. Под ден разбираме времето, през което центровете и на двете слънца са над хоризонта. Не отчитайте рефракцията.

Решение:

Понеже двете звезди са като Слънцето, то масите им считаме за еднакви и равни на масата на Слънцето М0. Следователно двете звезди се движат около общия си център на масите по окръжност с диаметър d, равен на разстоянието между тях. Дължината на страната на равностранния триъгълник, образуван от Сияйната планета и звездите, е всъщност равна на d. Звездите се движат една около друга под действие само на своите гравитационни сили, а въздействието върху тях на планетата не отчитаме, понеже е нищожно малко. Ето защо, орбиталния период T на движение на звездите можем да намерим от III закон на Кеплер в обобщен вид:

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{\gamma \cdot 2M_0}{4\pi^2}$$

Ако d е в астрономически единици, а T в години, то можем да напишем:

$$\frac{d^3}{T^2} = 2$$

Оттук за орбиталния период получаваме:

$$T = \sqrt{\frac{d^3}{2}} \qquad (1)$$

Светимостите на всяка от звездите също считаме равна на светимостта на Слънцето L_0. Планетата, огрявана от двете звезди, като цяло получава от тях в единица време същата енергия, както Земята от Слънцето. Тъй като размерите на Земята и на Сияйната планета са еднакви, то от тях не зависи общото количество лъчиста енергия, което Земята и планетата получават от своите звезди. За съотношението на разстоянието d от всяка от звездите до Сияйната планета и разстоянието $d_0 = 1$ AU от Земята до Слънцето можем да напишем:

$$\frac{L_0}{d^2} = \frac{2L_0}{d^2}$$

Така получаваме:

$$d = d_0\sqrt{2}$$

$$d = \sqrt{2}\ \mathrm{AU} \approx 1.414\ \mathrm{AU}$$

Заместваме в (1), за да получим орбиталния период:

$$T = \sqrt{\frac{\sqrt{2^3}}{2}} = \sqrt[4]{2}\ \mathrm{yr} \approx 1.189\ \mathrm{yr}$$

Периодът на околоосно въртене на планетата P е свързан с продължителността на слънчевото денонощие P_1 чрез следното съотношение:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T}$$

$$P_1 = \frac{PT}{T - P}$$

$$P_1 \approx 66.42\ \mathrm{h}$$

Понеже оста на въртене на планетата е перпендикулярна на орбиталната ѝ равнина, продължителностите на деня и на нощтта ще са едни и същи за всички географски ширини, освен на полюсите. За обитател на Сияйната планета всеки ден в небето ще изгряват две слънца, отстоящи на 60° едно след друго. Денят ще започва с изгрева на първото слънце. То ще залезе след период, равен на половината от слънчевото денонощие P_1, след него второто слънце ще остане над хоризонта още в продължение на 1/6 от слънчевото денонощие. Следователно продължителността на деня ще бъде равна на $1/2 + 1/6 = 2/3$ от P_1, или 44.28 часа. Продължителността на нощта ще бъде съответно $P_1/3 \approx 22.14$ h.

Тези пресмятания са направени при предположение, че планетата се върти около оста си в същата посока, в която обикаля по орбитата си. Ако планетата се върти обратно, слънчевото денонощие би било $P_1 \approx 66 - 0.42 = 65.58$ h. Продължителностите на деня и нощта съответно биха били 43.72 и 21.86 часа.

Задача 3. В нощта на 12 юли 2018 г. проф. Никола Каравасилев провежда своите наблюдения на двуметровия телескоп в Националната астрономическа обсерватория Рожен ($\varphi_1 = +41°31'35''$, $\lambda_1 = 24°44'38''$ E). Точно в 22 часа по местно време неговият колега Момчил Петров от Троянската радиоастрофизическа обсерватория регистрира интересно явление и се обажда с молба да се насочи телескопът към обекта за проследяване на явлението във видимата област. Астрономът Петров, както винаги припряно, обяснява на Никола, че това трябва да е звездата Капела, с координати в съответната епоха $\alpha = 5^h17^m23^s$, $\delta = +46°0'23''$. След кратко размишление професорът отказва да изпълни молбата.

- Каква е била причината за отказа?
- Щеше ли професорът да се вслуша в молбата, ако се намираше в обсерваторията Туорла, Финландия, с координати: $\varphi_2 = +60°24'57''$, $\lambda_2 = 22°26'36''$E?

Решение:

Нека първо да пресметнем звездното време в момента, в който е постъпила молбата. Датата е 12 юли или 73 дни преди есенното равноденствие. В момента на есенното равноденствие пролетната равноденствена точка отстои на 12^h и тогава слънчевото време съвпада със звездното. С всеки изминал ден звездното време избързва напред от слънчевото с 3^m56^s . Умножавайки 3^m56^s по 73 получаваме, че на 12 юли звездното време е с $4^h47^m08^s$ назад спрямо слънчевото. Следователно в момента на наблюдението звездното време е било:

$$22^h - 4^h47^m08^s = 17^h12^m52^s$$

Капела има ректасцензия $\alpha = 5^h17^m23^s$. Това означава, че в този момент тя е била около долна кулминация. Бихме могли да се уверим, че звездата се намира под хоризонта, като пресметнем максималната деклинация на незалязващите звезди за географската ширина на Рожен. Тя е:

$$\delta_1 = 90° - \varphi_1 = +48°18'25''$$

Капела се намира южно от тази деклинация и ще е на около 2° под хоризонта. Това е била причината Никола да откаже да насочи телескопа към нея.

За случая в Турку, ако датата и часът по местно време са едни и същи, то и звездното време е същото. Следователно и там Капела ще се намира в долна кулминация. Остава само да оценим дали тя ще е под хоризонта. Обсерваторията Туорла има географска ширина

$$\varphi_2 = +60°24'57'',$$

Там максималната деклинация на незалязващите звезди е:

$$\delta_1 = 90° - \varphi_2 = +29°35'3''$$

Капела се намира на около 16,5° северно от този небесен паралел и следователно дори и в долна кулминация ще е над хоризонта и ще може да се наблюдава. Тогава най-вероятно молбата на астронома Петров не би получила отказ.

Нека сега да проверим дали във Финландия Слънцето няма да пречи на наблюденията. Датата е 12 юли, което е около 20 дни след лятното слънцестоене. Това означава, че деклинацията на Слънцето δ_0 е близка до максималната 23,5°. В случая ще я примем за 22°. В 22 часа по местно време Слънцето се е намирало почти в долна кулминация. За да намерим височината му h под хоризонта, използваме връзката:

$$h = \delta_0 - 90° + \varphi \approx 7°$$

Това означава, че Слънцето няма да е достатъчно ниско под хоризонта, небето ще е светло и наблюденията все пак няма да са възможни.